Задание 2. Кручение прямого бруса круглого сечения

Ступенчатый стальной стержень, жестко защемленный с одного конца, нагружен крутящими моментами.

Необходимо:

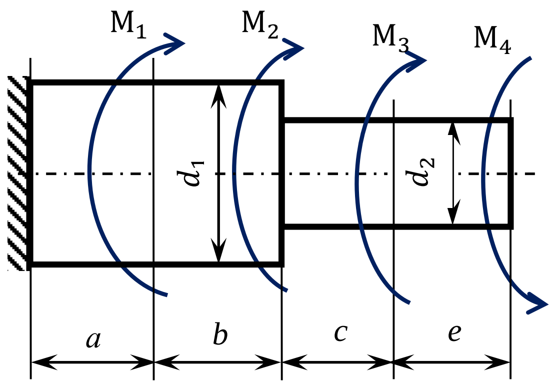
1) построить эпюру крутящих моментов по длине стержня;
2) при заданном значении допускаемого напряжения на кручение определить диаметры d_1 и d_2 из расчета на прочность;
3) построить эпюру углов поворота сечений.

Модуль сдвига (модуль упругости второго рода) принять $G = 8 \cdot 10^4$ МПа

Исходные данные приведены в таблице 1 и на рисунке 1.

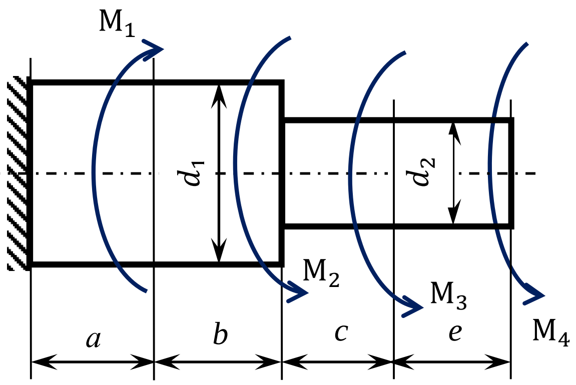
№ Варианта	№ Схемы	Расстояния, м				Моменты, кН*м				$[\tau_к]$, МПа
		a	b	c	e	M_1	M_2	M_3	M_4	
1	1	1,2	1,3	1,5	2,1	6	2,1	2	0,1	30
2	2	1,3	1,4	1,6	2,2	5,9	2,2	1,9	0,2	30
3	3	1,4	1,5	1,7	2,3	5,8	2,3	1,8	0,3	35
4	4	1,5	1,6	1	2,4	5,7	2,4	1,7	0,4	35
5	5	1,2	1,3	1,5	2,1	6	2,1	2	0,1	30
6	6	1,3	1,4	1,6	2,2	5,9	2,2	1,9	0,2	30
7	7	1,4	1,5	1,7	2,3	5,8	2,3	1,8	0,3	35
8	8	1,5	1,6	1	2,4	5,7	2,4	1,7	0,4	35
9	9	1,5	2,1	1,2	1,3	2	0,1	6	2,1	30
10	10	1,6	2,2	1,3	1,4	1,9	0,2	5,9	2,2	30
11	11	1,7	2,3	1,4	1,5	1,8	0,3	5,8	2,3	35
12	12	1	2,4	1,5	1,6	1,7	0,4	5,7	2,4	35
13	13	1,5	2,1	1,2	1,3	2	0,1	6	2,1	30
14	14	1,6	2,2	1,3	1,4	1,9	0,2	5,9	2,2	30
15	15	1,7	2,3	1,4	1,5	1,8	0,3	5,8	2,3	35
16	16	1	2,4	1,5	1,6	1,7	0,4	5,7	2,4	35
17	1	1,5	2,1	1,2	1,3	2	0,1	6	2,1	30
18	2	1,6	2,2	1,3	1,4	1,9	0,2	5,9	2,2	30
19	3	1,7	2,3	1,4	1,5	1,8	0,3	5,8	2,3	35
20	4	1	2,4	1,5	1,6	1,7	0,4	5,7	2,4	35
21	5	1,5	1,6	1	2,4	5,7	2,4	1,7	0,4	30
22	6	1,2	1,3	1,5	2,1	6	2,1	2	0,1	30
23	7	1,3	1,4	1,6	2,2	5,9	2,2	1,9	0,2	35
24	8	1,4	1,5	1,7	2,3	5,8	2,3	1,8	0,3	35
25	9	1,5	1,6	1	2,4	5,7	2,4	1,7	0,4	30

1



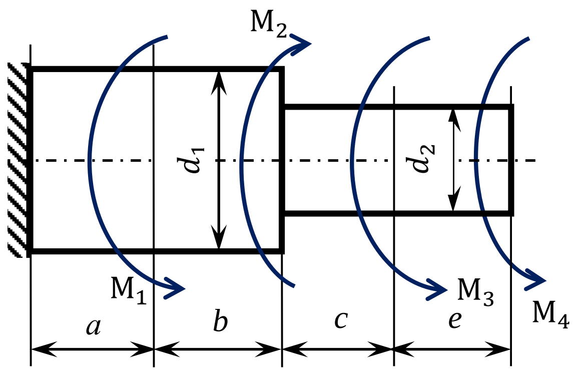
M_1
M_2
M_3
M_4
d_1
d_2
a
b
c
e

2



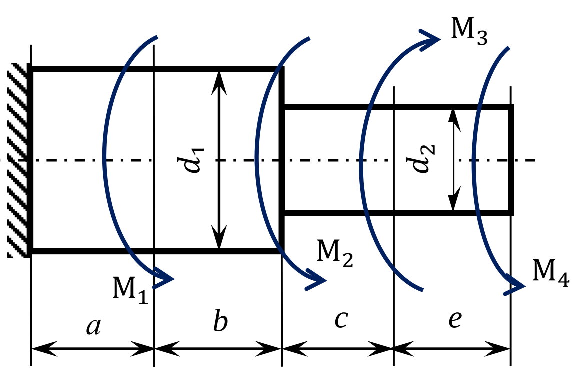
M_1
M_2
M_3
M_4
d_1
d_2
a
b
c
e

3



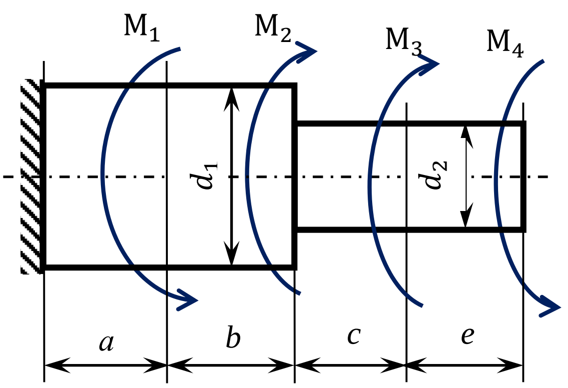
M_2
M_1
M_3
M_4
d_1
d_2
a
b
c
e

4



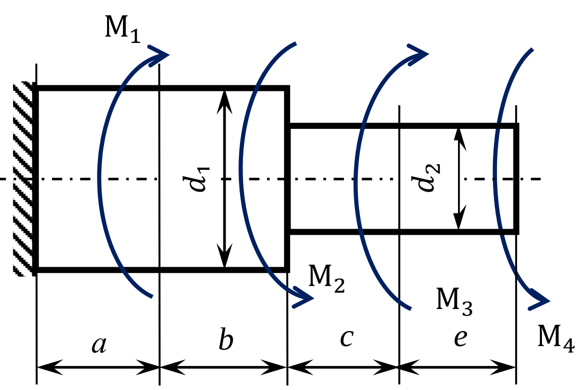
M_3
M_1
M_2
M_4
d_1
d_2
a
b
c
e

5



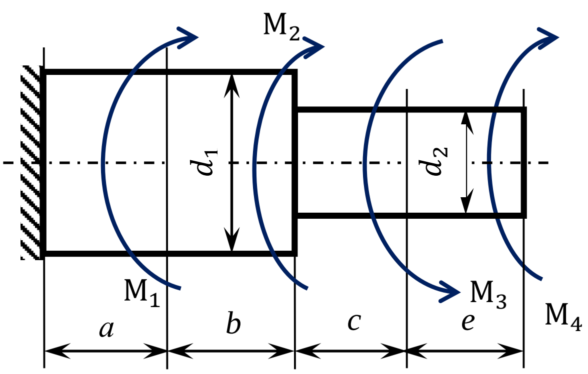
M_1
M_2
M_3
M_4
d_1
d_2
a
b
c
e

6



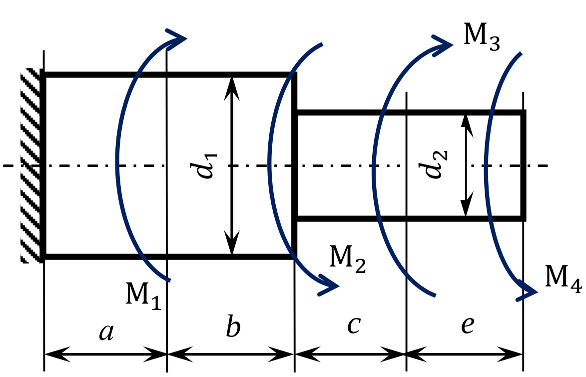
M_1
M_2
M_3
M_4
d_1
d_2
a
b
c
e

7



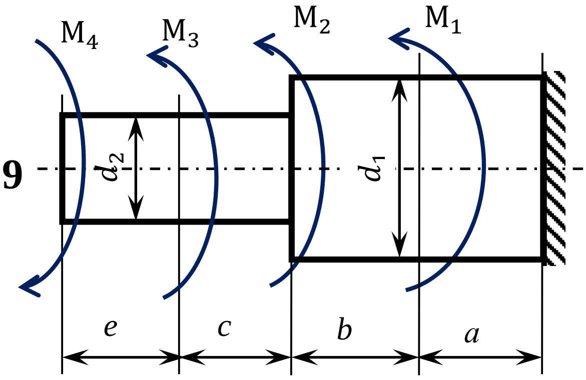
M_2
M_1
M_3
M_4
d_1
d_2
a
b
c
e

8

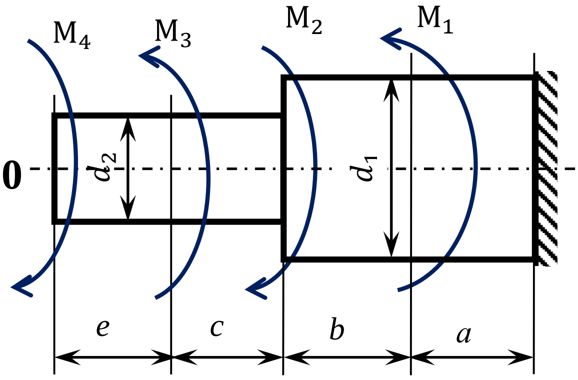


M_3
M_1
M_2
M_4
d_1
d_2
a
b
c
e

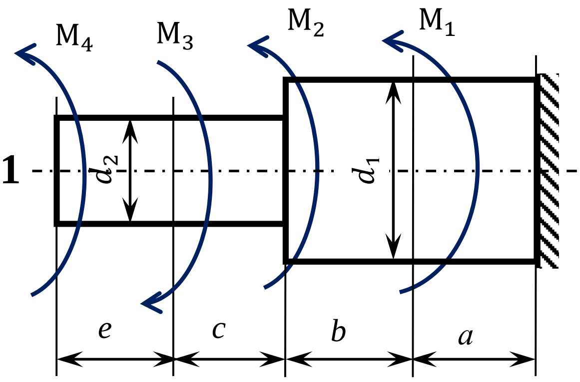
9



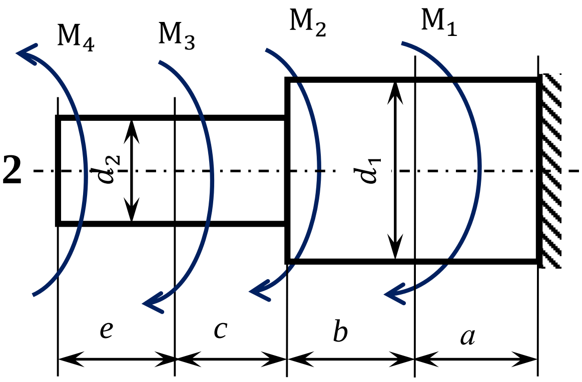
10



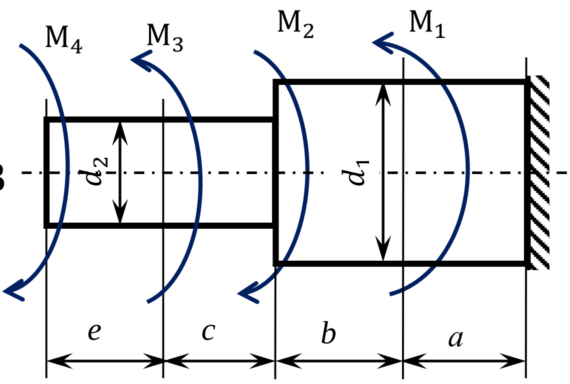
11



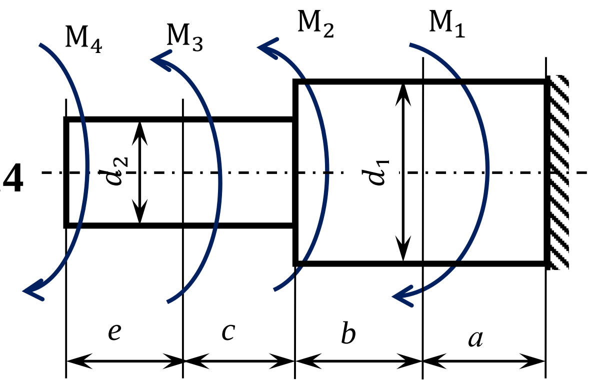
12



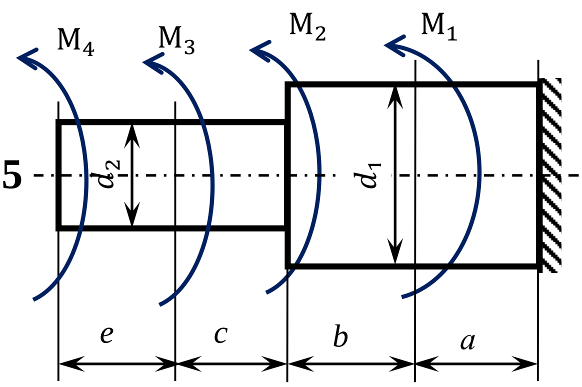
13



14



15



16

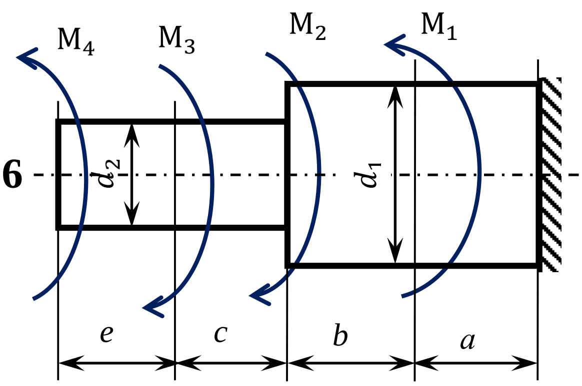


Рисунок 1

Пример выполнения задания

Исходные данные

Таблица 2

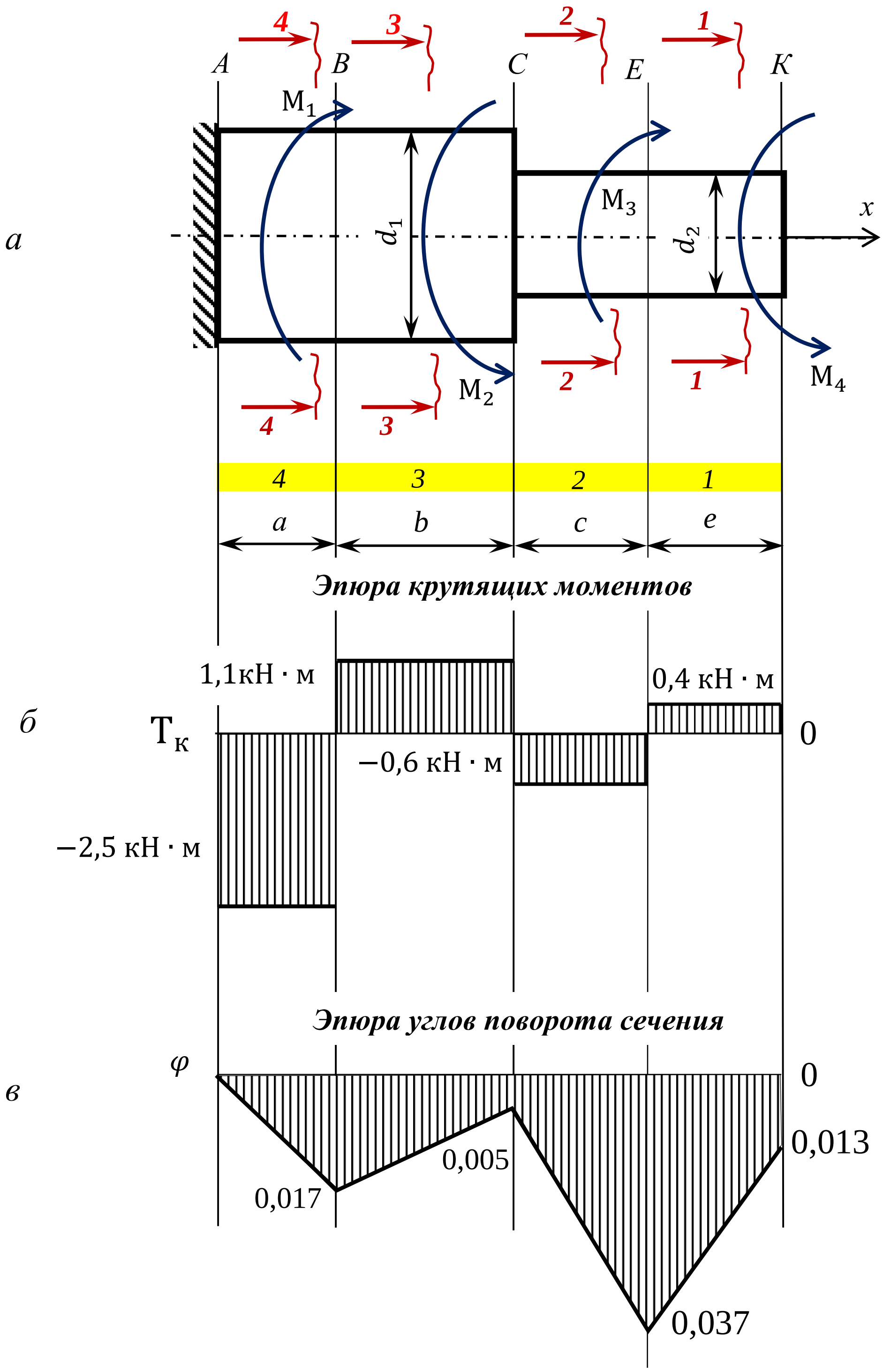


Рисунок 2

Решение

1. Построение эпюры крутящих моментов.
   Разбиваем брус на четыре участка, внутри которых, действие крутящих моментов, приложенных к брусу, постоянно (рисунок 2*а*).

Расстояния, м				Моменты, кН*м				$[\tau_к]$, МПа	$G,$ МПа
a	b	c	e	$М_1$	$М_2$	$М_3$	$М_4$		
1	1,5	1,1	1,2	3,6	1,7	1	0,4	50	$8 \cdot 10^4$

Для 1-го участка:

$$\sum М_х = 0; \quad Т_{к1} - М_4 = 0;$$

$$Т_{к1} = М_4 = 0{,}4 \ (кН \cdot м)$$

Для 2-го участка:

$$\sum М_х = 0; \quad Т_{к2} - М_4 + М_3 = 0;$$

$$Т_{к2} = М_4 - М_3 = 0{,}4 - 1 = -0{,}6 \ (кН \cdot м)$$

Для 3-го участка:

$$\sum М_х = 0; \quad Т_{к3} - М_4 + М_3 - М_2 = 0;$$

$$Т_{к3} = М_4 - М_3 + М_2 = 0{,}4 - 1 + 1{,}7 = 1{,}1 \ (кН \cdot м)$$

Для 4-го участка:

$$\sum М_х = 0; \quad Т_{к4} - М_4 + М_3 - М_2 + М_1 = 0;$$

$$Т_{к4} = М_4 - М_3 + М_2 - М_1 = 0{,}4 - 1 + 1{,}7 - 3{,}6 = -2{,}5 \ (кН \cdot м)$$

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов – рисунок 2 *б*.

2. Определение диаметров d_1 и d_2.
   Размеры поперечных сечений определим из формулы

$$\tau_{max} = \frac{T_{к\ max}}{W_\rho} = [\tau]$$

Полярный момент сопротивления для бруса круглого сечения

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \cong 0{,}2d^3$$

Тогда $d = \sqrt[3]{\frac{T_{К\ max}}{0{,}2[\tau]}}$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{2{,}5 \cdot 10^6}{0{,}2 \cdot 50}} = 62{,}99 \ (мм)$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{0,6 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 50}} = 39,15 \text{ (мм)}$$

Принимаем $d_1 = 65$ (мм) и $d_2 = 40$ (мм).

3. Построение эпюры углов поворота сечений.

Угол поворота сечения бруса с постоянным крутящим моментом определим, используя закон Гука при кручении

$$\varphi = \frac{T \cdot \ell}{G \cdot I_\rho} = [\tau]$$

Полярный момент инерции для бруса круглого сечения

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \cong 0,1d^4$$

Для 1-го сечения

$$I_{\rho 1} \cong 0,1d_1^4 = 0,1 \cdot 6,5^4 = 178,5 \text{ см}^4$$

Для 2-го сечения

$$I_{\rho 2} \cong 0,1d_2^4 = 0,1 \cdot 4^4 = 25,6 \text{ см}^4$$

Определение углов поворота ведем с защемленного конца, так как в заделке угол поворота $\varphi_\text{А} = 0$

$$\varphi_\text{В} = \frac{T_{\text{к}4} \cdot a}{G \cdot I_{\rho 1}} = \frac{-2,5 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 178,5 \cdot 10^4} = -0,017 \text{ (рад)}$$

$$\varphi_\text{С} = \varphi_\text{В} + \frac{T_{\text{к}3} \cdot b}{G \cdot I_{\rho 1}} = -0,017 + \frac{1,1 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 178,5 \cdot 10^4} = -0,005 \text{ (рад)}$$

$$\varphi_E = \varphi_C + \frac{T_{\text{к}2} \cdot c}{G \cdot I_{\rho 2}} = -0,005 + \frac{-0,6 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 1,1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 25,6 \cdot 10^4} = -0,037 \text{ (рад)}$$

$$\varphi_K = \varphi_E + \frac{T_{\text{к}1} \cdot e}{G \cdot I_{\rho 2}} = -0,037 + \frac{0,4 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 25,6 \cdot 10^4} = -0,013 \text{ (рад)}$$

По полученным значениям φ строим эпюру углов поворота сечений бруса, φ изменяется по линейному закону на каждом участке бруса – рисунок 2*в*.